EXERCICE N°1 — 5 points

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x)=\tan x$.

1°) a) Montrer que f est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0,1]$ et calculer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0,1]$, et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

c) En déduire que pour tout $x\in[0,1]$: $f^{-1}(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

2°) On considère la suite (I_n) définie sur $IN^*\setminus\{1\}$ par $I_n=\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t^{2n}}dt$.

a) On pose $\varphi_n(t)=f^{-1}\left(t^n\right)$ avec $t\in[0,1]$. Prouver que φ_n est dérivable sur $[0,1]$ et calculer $\varphi_n'(t)$.

b) En déduire I_n en fonction de n.

3°) Soit la suite (J_n) définie sur IN^* par $J_n=\int_0^1 \frac{t^{3n-1}}{\left(1+t^{2n}\right)^2}dt$.

a) À l'aide d'une intégration par parties montrer que $J_n=-\frac{1}{4n}+\frac{1}{2}I_n$ puis en déduire J_n en fonction de n.

b) Utiliser les résultats des questions précédentes pour calculer l'intégrale $A=\int_0^1 \frac{t+2t^5}{\left(1+t^4\right)^2}dt$.

EXERCICE N°2 — 7 points

Dans la figure ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-1;+\infty[$ et la courbe $\mathscr{C}'$ est celle de la restriction de f' sur $[0;+\infty[$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°) Déterminer, en utilisant le graphique, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée.

Dans la suite de l'exercice, on prend : $f(x)=\sqrt{x^3+1}$.

2°) On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit **S** le solide de révolution engendré par la rotation de l'arc AB de $\mathscr{C}$ autour de l'axe $\left(O;\vec{i}\right)$ tel que A (–1 ; 0)et B(0 ; 1).

Calculer le volume $\mathscr{V}$ de **S**.

3°) On pose pour tout entier $n\geq 1$,

$I_n=\int_0^1 x^n F(x)dx$, **où *F* est la primitive de *f* sur** $[-1;+\infty[$ **qui s'annule en 1**.

: 23390248 - 29862267

Tous droits réservés © TakiAcademy.com

a) Calculer $\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}dx$, en déduire la valeur de I_1.

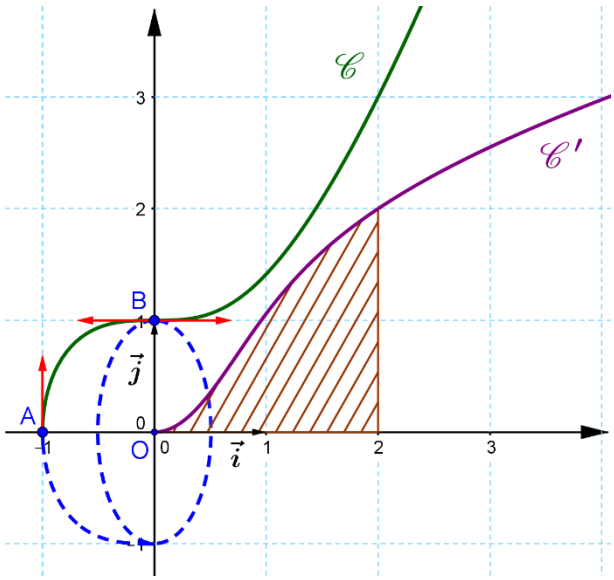
b) Déterminer le sens de variation de F sur $[-1;+\infty[$,

en déduire le signe de $F(x)$ pour tout $x \in [-1;+\infty[$

c) Montrer que $I_n \leq 0$ pour tout $n \geq 1$.

d) Montrer que la suite (I_n) est croissante, en déduire qu'elle est convergente.

e) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a : $\frac{F(0)}{n+1} \leq I_n \leq 0$. En déduire la limite de (I_n).



Tous droits réservés © TakiAcademy.com